Primer Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 20/05/24 **Apellido y nombre:**

Curso: Z2042 **Legajo:**

1. Halle los puntos de la superficie de nivel de valor 16 de la función $f(x;y;z) = -x^2 + y^2 + z^2$ en el cual el plano tangente a la superficie es paralelo al plano de ecuación $x + 2y + z = 5$

2. Determine el valor de derivada direccional máxima en $(1;1)$ de la función compuesta $z = h(x;y) = (f \circ \bar{g})_{(x;y)}$ si $\bar{g}(x;y) = (\underbrace{xy}_{u}; \underbrace{xy^2 - 2}_{v})$ donde el plano tangente a la gráfica de la función $z = f(u;v)$ en el punto $(1;-1;f(1;-1))$ es paralelo al plano $2x + y + 2z = 0$

3. Determine si existen para la función $f(x;y) = x^2y - 2y + y^2$ en su dominio natural a)puntos críticos b)extremos relativos c) extremos absolutos

4. Halle la curva ortogonal; a la familia de curvas en la que la recta tangente en cada punto tiene pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa del punto; que pasa por el $(1;-2)$

5. a) Defina derivada direccional en un punto para la función $z = f(\bar{x})$ $f: D \subset R^n \to R$ b) verifique si existe la derivada direccional en el origen para la función $f(x;y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & si\ y \neq x \\ |x| & si\ y = x \end{cases}$ en la dirección que va del punto al $(1;1)$

6. a) Demuestre que si $z = f(\bar{x})$ es diferenciable en $\bar{a} \Rightarrow f(\bar{x})$ es continua en $\bar{a}$ b) verifique si la función $f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$ es diferenciable en el origen

AM2	1° parcial Prof. Hernández	HOJA N° 1/3 FECHA 20-5-24

① Hallar los puntos de la sup de nivel de valor 16 de la función $f(x,y,z) = -x^2+y^2+z^2$ en el cual el plano tangente a la superf. es paralelo al plano de ec. $x+2y+z=5$: T

$S_{16} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 16\} \Rightarrow 16 = -x^2+y^2+z^2 : S_{16}$

x TFI $\rightarrow \nabla F_{(x,y,z)} \perp S_k \rightarrow \nabla$ paralelo a cualquier sup. de nivel

Quiero hallar $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \nabla f(x,y,z) \parallel N_T \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = k N_T$

$T: x+2y+z=5 \rightarrow N_T = (1,2,1)$

$\nabla F(x,y,z) = (-2x, 2y, 2z)$

$\rightarrow (-2x,2y,2z) = \overbrace{k(1,2,1)}^{(k,2k,k)}$

$$\begin{cases} -2x = k & ① \\ 2y = 2k & ② \\ 2z = k & ③ \end{cases}$$

x ① y ③ $-2x = 2z$

$\boxed{x = -z}$

② $y = k \xrightarrow{③} \boxed{2z = y}$

$S_{16}: 16 = -x^2+y^2+z^2$ donde $x=-z$, $y = 2z$

$16 = -(-z)^2 + (2z)^2 + z^2 =$

$= -z^2 + 4z^2 + \cancel{z^2} = 16 \rightarrow z^2 = 4 \rightarrow |z| = 2$

$z = 2 \rightarrow x = -2$, $y = 4$

$z = -2 \rightarrow x = 2$, $y = -4$

$$\boxed{P_1 = (-2,4,2) \quad y \quad P_2 = (2,-4,-2)}$$

NOTA

② Determinar el valor de la derivada direccional máxima en $(1,1)$ de la función compuesta $z = h(x,y) = (f \circ \bar{g})_{(x,y)}$ si: $\bar{g}(x,y) = (xy\ ;\ xy^2 - z)$ donde el plano tangente a la gráfica de la función $z = f(u,v)$ en el punto $(1;-1;f(1,-1))$ es paralelo al plano $2x + y + 2z = 0$

$$h(x,y) = f(\bar{g}(x,y)) \rightarrow Dh(1,1) = Df_{\bar{g}(1,1)}\ D\bar{g}_{(1,1)}$$

$$= Df_{(1,-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$\bullet\ \bar{g}(1,1) = (1,-1)$

$$D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \rightarrow D\bar{g}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$h'_{x(1,1)}$ $\quad$ $h'_{y(1,1)}$

Hallo $Df(1,-1)$

$$\nabla f_{(1,-1)} \ //\ 2x + y + 2z = 0$$

$$(f'_{x(1,-1)}, f'_{y(1,-1)}, -1) = k(2,1,2)$$

$$\begin{cases} f'_{x(1,-1)} = 2k \\ f'_{y(1,-1)} = k \\ -1 = 2k \rightarrow k = -1/2 \end{cases}$$

$f'_{x(1,-1)} = -1$

$f'_{y(1,-1)} = -1/2$

$$\frac{\partial h}{\partial r}(1,1)\Big|_{max} = \|\nabla h_{(1,1)}\| = \|(-\tfrac{3}{2}, -2)\| =$$

$$= \sqrt{\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial r}(1,1)\Big|_{max} = \frac{5}{2}}$$

NOTA

AM 2	1° parcial	Prof. Hernández	HOJA N° 2/3
			FECHA 20-5-24

③ Determinar, si $\exists$ para la función $f(x,y) = x^2y - 2y + y^2$ en su dominio natural:

a) Puntos críticos

f es diferenciable (polinomio) $\rightarrow$ busco $(x,y) \in \mathbb{R} \, / \, \nabla f = \bar{0}$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy = 0 \longrightarrow \underset{①}{x=0} \ \vee \ \underset{②}{y=0} \\ f'_y = x^2 - 2 + 2y = 0 \end{cases}$$

① $x=0 \rightarrow 0^2 - 2 + 2y = 0 \rightarrow y = 1 \longrightarrow \boxed{PC_1 = (0,1)}$

② $y=0 \rightarrow x^2 - 2 + 2\times 0 = 0 \rightarrow \underbrace{x^2 = 2}_{|x| = \sqrt{2}}$ $\boxed{PC_2 = (\sqrt{2},0)}$ $\vee$ $\boxed{PC_3 = (-\sqrt{2},0)}$

b) Extremos relativos

Criterio del hessiano

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2y \\ f''_{xy} = 2x \\ f''_{yy} = 2 \end{cases} \rightarrow H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

$H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{|H_{(0,1)}| = 4 > 0 \text{ y } f''_{xx} = 2 > 0}$

$\boxed{f \text{ alcanza mín. relativo en } (0,1)}$ y toma valor -1

$H(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |H(\sqrt{2},0)| < 0 \rightarrow$ NO es extremo

$H(-\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |H(-\sqrt{2},0)| < 0 \rightarrow$ NO es extremo

c) Extremos absolutos

$f(0,1) = -1$ (mínimo relativo), $\underbrace{f(10,-0{,}5) = -\frac{1995}{4} < -1}$

$\boxed{\nexists \text{ extremos absolutos}}$

(en $(0,1)$ tal como mínimo rel pero NO absoluto)

NOTA

④ Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas en la que la recta tangente en cada punto tiene pendiente igual al cociente entre la ordenada y la abscisa del punto, que pasa por el $(1,-2)$

curva "original" con pendiente = cociente ordenada y abscisa.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Curva ortogonal $\rightarrow y'_{\perp} = \frac{-1}{y'} = -\frac{x}{y} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

$$y\,dy = -x\,dx$$

integro m.a.m $\quad \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \quad S.G}$$

$k = 2c$

$$\boxed{x^2 + y^2 = k}$$

Pasa por $(1,-2) \rightarrow x = 1$, $y = -2$

$$1^2 + (-2)^2 = k = 5$$

$$\boxed{C: \; x^2 + y^2 = 5}$$

⑤ a) Definir derivada direccional en un punto para $z = f(\bar{x})$ $\quad f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(\bar{x}, \check{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\check{v}) - f(\bar{x})}{h}$$

b) Verificar si $\exists$ la derivada direccional en el origen para:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } y \neq x \\ |x| & \text{si } y = x \end{cases}$$ en la dirección que va del punto al $(1,1)$

$\check{v} = (a,b)$
$a^2 + b^2 = 1$

$$f'((0,0), \check{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h\check{v}) - \overbrace{f(0,0)}^{x=0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha, hb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(ha, hb) =$$

$x = a$
$y = b$

si $a = b$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot |ha| \overset{a \neq 0}{=} \begin{cases} \rightarrow +a \\ \rightarrow -a \end{cases}$$ según si $h \rightarrow 0^-$ o $h \rightarrow 0^+$ $\Big\} \nexists \lim$

$$\boxed{\nexists\, f'((0,0), \check{v}) \text{ si } a = b}$$

en $(1,1)$ $a = b$

$$\boxed{\nexists\, f'((0,0), \check{v}_1) \quad \check{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

si $a \neq b$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[(ha)^2 + (hb)^2\right] = \lim_{h \to 0} \frac{h^2(a^2 + b^2)}{h} = 0$$

$$\boxed{f'((0,0), \check{v}) = 0 \quad \text{si } a \neq b}$$

No es necesario hacerlo

NOTA

AM 2	1° parcial	Prof. Hernández	HOJA N° 3/3 FECHA 10-5-24

⑥ a) Demostrar que si $z = f(\bar{x})$ es diferenciable en $\bar{a} \Rightarrow f(\bar{x})$ es continua en $\bar{a}$

si $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\bar{a} \Rightarrow f$ continua en $\bar{a}$

Dem

f diferenciable en $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{a}+\bar{h}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\bar{a})\,\bar{h} + \varepsilon\bar{h}\,\|\bar{h}\|$

$\lim_{\vec{h}\to\bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = 0$

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})\bar{h} + \varepsilon(\bar{h})\,\|\bar{h}\|$$

I. $\vec{a} \in dom(f) \to \exists f(\bar{a}) \to \lim_{h\to\bar{0}} f(\bar{a}) = f(\bar{a})$ $\quad f(\bar{a}) \in \mathbb{R}$

II. f dif $\Rightarrow \exists \nabla f(\bar{a}) \to \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h} = 0$

III. $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} f(\bar{a}+\bar{h}) = \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} f(\vec{a})}_{\text{I}\ f(\bar{a})} + \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \nabla f(\bar{a})\vec{h}}_{\text{II}\ \to 0} + \underbrace{\lim_{\bar{h}\to 0} \varepsilon(\bar{h})\,\overbrace{\|\bar{h}\|}^{\lim \to 0}}_{\text{III}\ \to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{h}\to\vec{0}} f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a})$$

$\to$ es la definición de continuidad

NOTA

b) Verificar si la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$ es diferenciable en el origen

Analizo si es continua (NO continua $\Rightarrow$ NO dif) el contrarrecíproco del item a)

- $f(0,0) = 0$

- ¿$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

si $(x,y) \in y=0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y} = \begin{cases} \xrightarrow{si\ x=0} 0 \\ \xrightarrow{si\ y=x^3} 1 \end{cases} \neq$ $\nexists \lim$

$(x,y) \in y \neq 0$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ NO cont en $(0,0)$

$\boxed{f \text{ no cont en } (0,0) \Rightarrow f \text{ NO dif en } (0,0)}$